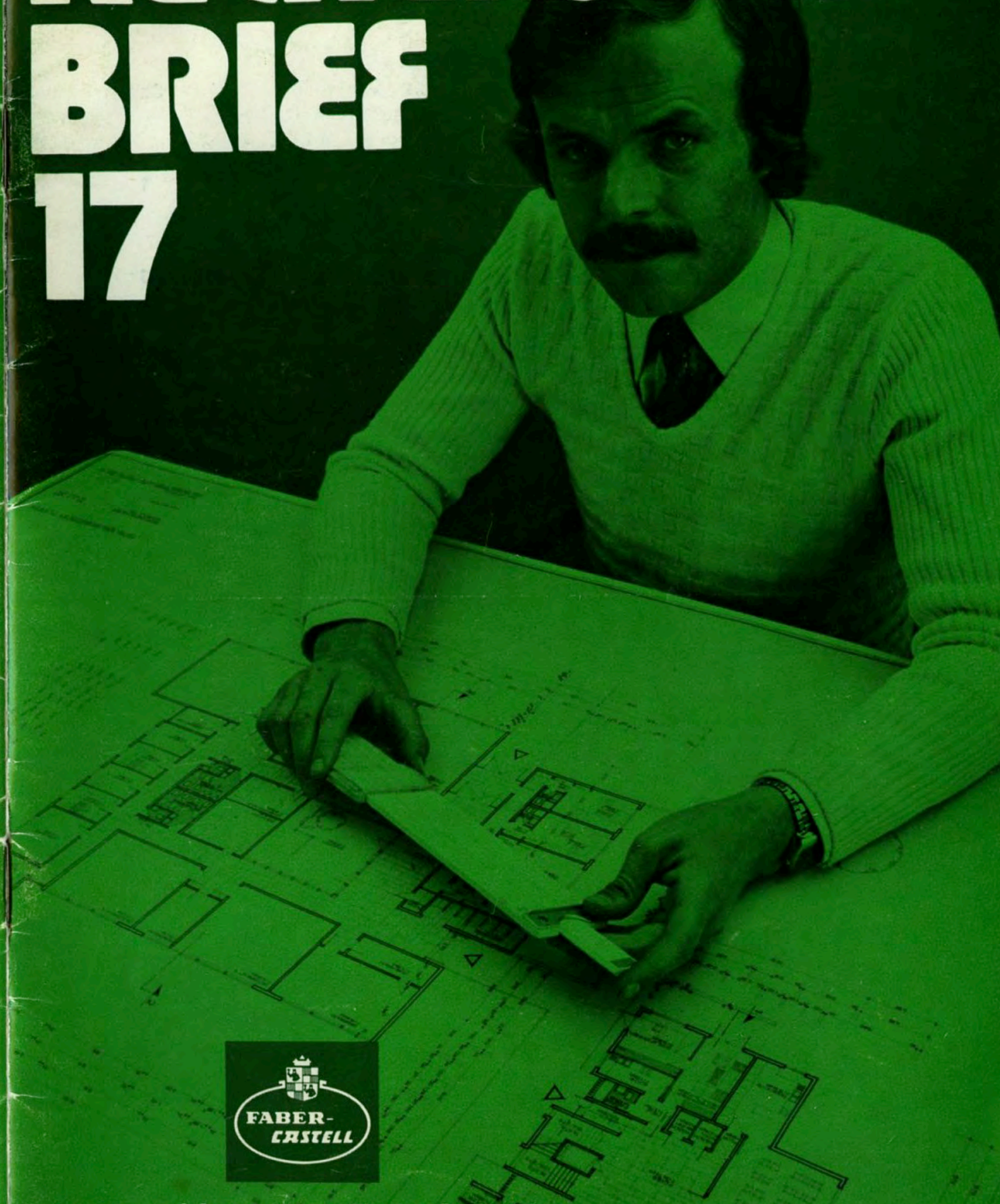
RECHENSTAB BRIEF 17



Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

INHALT

Anschriften der Verfasser:

Dr. Fritz Heywang, Schleichstraße 19, 8500 Nürnberg-Eibach

Helmut Rixecker, Oberstudiendirektor, Schumannstr. 46, 6600 Saarbrücken

Georg Sellge, Lektor, Järnvägsgatan 2, SF-64/20 Kristinestad 2 / Finnland-Suomi

Hartmut Westphal, Ing. (grad.), Wiesengrundstraße 2, 8510 Fürth i. B.

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Bereich Wissenschaftliche und Pädagogische Publizistik der Firma Faber-Castell

FABER-CASTELL

Helmut Rixecker, Saarbrücken

Der Einsatz von Taschenrechnern in Klasse 7

Bericht über einen Unterrichtsversuch

In den letzten 10 Wochen des Schuljahres 1974/75 habe ich in der Klasse 7c des Staatlichen Ludwigsgymnasiums zu Saarbrücken erprobt, wie man einen Klassensatz von Taschenrechnern sinnvoll im Mathematikunterricht benutzen kann.

Die Schüler bekamen je einen Taschenrechner TR 1 der Firma Faber-Castell samt Ladegerät ausgehändigt, die sie mit nachhause nehmen konnten und zum Mathematikunterricht mit in die Schule brachten. Etwa ein halbes Dutzend Schüler brachten jeweils ihr Ladegerät mit Ersatzbatterie zum Unterricht mit; dadurch konnten Rechner, die im Verlauf der Stunde mit leerer Batterie ausgefallen wären, wieder gebrauchsfertig gemacht werden. Dies erwies sich als notwendig, obwohl regelmäßig beim Diktieren der Aufgaben auf das Laden der Batterie hingewiesen wurde. In der ganzen Zeit trat nur bei einem Rechner eine Funktionsstörung ein, die von der Herstellerfirma schnellstens repariert wurde. Beschädigungen durch Mutwillen oder fahrlässige Behandlung traten nicht auf, auch Diebstähle ereigneten sich nicht. Es erscheint nicht sachdienlich, die geschilderten Risiken dadurch verringern zu wollen, daß die Rechner nur in der Schule aufbewahrt werden.

Die Klasse hatte zu Beginn des Schuljahres den Gebrauch des Rechenstabes gelernt. Zum Einsatz eines Taschenrechners boten sich solche Rechnungen an, bei denen der Rechenstab nicht die notwendige Genauigkeit liefert und das handschriftliche Rechnen zu mühsam ist.

Aus dem gegebenen aktuellen Anlaß der saarländischen Landtagswahlen wurde das Verfahren von d'Hondt zur Berechnung der Sitzverteilung in einer Volksvertretung erläutert und angewandt. Die Motivation der Schüler war groß, sie entstammte einmal aus dem politischen Sachverhalt, zum andern aus der mathematischen Methode. Der Speicher M (von lateinisch „memoria") wurde von Anfang an benutzt.

Anschließend wurde die Prozentrechnung behandelt. Der Begriffsapparat wurde mit Absicht klein gehalten. Wenn 18 Schüler von 34 auswärtig sind, dann ist $\frac{18}{34} = 0{,}529$ der Bruchteil oder Anteil der Auswärtigen. $0{,}529 = \frac{52{,}9}{100}$, statt Hundertstel sagt man auch Prozent. Als Merksatz wurde aufgeschrieben: 3% von 517 DM = 517 DM · 0,03. Wenn irgend ein Anteil 7% beträgt und 228 m ausmacht, dann gilt für die Gesamtheit $x \cdot 0{,}07 = 228$ m oder $x = 228$ m : 0,07. Diese Dinge wurden von Fall zu Fall besprochen, die Ausdrücke „Grundwert" und „Prozentwert" wurden vermieden. Mit Nachdruck wurde daraufhin gearbeitet, daß eine Erhöhung um 8% eine Multiplikation mit 1,08, eine Verminderung um 13% eine Multiplikation mit 0,87 bedeutet. Wenn also ein Rechnungsbetrag von 671,62 DM 11% Mehrwertsteuer einschließt, dann gilt für den Rechnungsbetrag ohne Mehrwertsteuer $x \cdot 1{,}11 = 671{,}62$ DM.

In lockerer Folge schlossen sich Aufgaben zur Zinseszinsrechnung an, selbstverständlich wurde hier das Anwachsen eines vorgegebenen Kapitals Jahr um Jahr berechnet. Genau so wurden auch Beispiele zum radioaktiven Zerfall behandelt.
Bei der Tilgung von Darlehen durch feste Jahresraten (Annuitätentilgung) ergab sich die Frage, wie man den Speicher sinnvoll belegt.
Erstaunlich war die Feststellung, wie unterschiedlich rasch die Schüler die geschilderten Probleme bewältigten. Ohne daß die Schüler durch Fragen des Lehrers zu Überschlagsergebnissen aufgefordert wurden, stellten gute Schüler diese fast immer, zum Teil mit verblüffendem Überblick, an. Es ergaben sich daraus eine Reihe von Wettbewerbssituationen, die erheblich die Arbeit motivierten.
In einer Klassenarbeit, die Aufgaben der genannten Art sowie Erstellen von Tabellen enthielt, ergab sich das Leistungsgefälle in der Klasse, das man vom herkömmlichen Unterricht gewohnt war. Es zeigt sich für alle Beteiligten deutlich, daß — trotz aller Hilfsmittel — der Mensch der eigentliche „Rechner" ist.

Anhang 1:

Lösung typischer Aufgaben mit dem Taschenrechner **TR 1**:

1. Ein Kapital von 4350 DM wird jährlich zu 3% verzinst.
   Wie wächst es mit Zinseszins Jahr um Jahr an?
   Zunahme um 3% bedeutet Multiplikation mit 1,03.

1	·	0	3	=	M		
4	3	5	0	x	M	=	Anzeige 4480,5
				x	M	=	„ 4614,915
				x	M	=	„ 4753,3624

·

·

·

Ergebnis: Das Kapital beträgt nach n Jahren K_n DM:

n	1	2	3	. . .
K_n	4480,50	4614,92	4753,36	. . .

2. Radioaktives Carbon 14 nimmt pro Jahrtausend um 11,3% seiner Masse ab.
   Wir betrachten ein Kilogramm. Abnahme um 11,3% bedeutet Multiplikation mit 0,887.

·	8	8	7	=	M	Anzeige 0,887
			x	M	=	„ 0,786 769
			x	M	=	„ 0,697 864 1
			x	M	=	„ 0,619 005 4
			x	M	=	„ 0,549 057 7
			x	M	=	„ 0,487 014 1

Ergebnis:

jetzt	1 kg
nach 1 Jahrt.	0,887 kg
2	0,787 kg
3	0,698 kg
4	0,619 kg
5	0,549 kg
6	0,487 kg

Nach 6 Jahrtausenden ist die Masse von 1 kg um mehr als die Hälfte zerfallen.
(Die „Halbwertszeit" liegt zwischen 5 und 6 Jahrtausenden.)

3. Eine Anleihe (geliehenes Geld) wird durch feste jährliche Raten (Annuitäten) zurückgezahlt. Die Annuität setzt sich aus einem Tilgungsanteil und einem Zinsanteil zusammen.
   Eine Schuld von 20 000 DM soll zu 8% verzinst und in Annuitäten von 4000 DM zurückgezahlt werden.

2	0	0	0	0	=	M	
·	0	8	x	M	=		Anzeige 1600 (Zinsen in DM)
—	4	0	0	0	=		Anzeige —2400 (negative Tilgung in DM)
+	M	=	M				Anzeige 17600 (neue Restschuld)

Ergebnis:

Jahre	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	20 000,00	1 600,00	2 400,00	4 000,00
2	17 600,00	1 408,00	2 592,00	4 000,00
3	15 008,00	1 200,64	2 779,36	4 000,00
4	12 208,64	976,69	3 023,31	4 000,00
5	9 185,33	734,83	3 265,17	4 000,00
6	5 920,16	473,61	3 526,39	4 000,00
7	2 393,77	191,50	—	2 585,27

Die letzte Rückzahlungsrate ist geringer als die Annuität, sie ist die Summe aus Restschuld und Zinsen.
Es ist nicht sinnvoll, den Zinssatz 0,08 zu speichern, da hierbei Rundungsfehler bei der Restschuld entstehen.
Zur Kontrolle der Rechnung kann man nachprüfen, daß die Tilgungsanteile Zeile um Zeile um den Zinsfaktor 1,08 wachsen. Damit hat man eine Möglichkeit, die Laufzeit der Tilgung auszurechnen.

4. Sitzverteilung in einem Parlament mit 20 Sitzen nach d'Hondt:

	Partei A		Partei B		Partei C		
Stimmenanteil	49,1		38,3		9,2		%
: 1	49,1	①	38,3	②	9,2	⑩	
: 2	24,55	③	19,15	④	4,6	⑳	
: 3	16,3666	⑤	12,7666	⑥	3,666		
: 4	12,275	⑦	9,575	⑨			
: 5	9,82	⑧	7,66	⑫			
: 6	8,1833	⑪	6,3833	⑭			
: 7	7,014	⑬	5,471	⑯			
: 8	6,1375	⑮	4,7875	⑲			
: 9	5,4555	⑰	4,2555				
: 10	4,91	⑱					
: 11	4,4636						

Partei A:

4	9	·	1	=	M
C					

Anzeige 49,1

M	:	2	=
C			

Anzeige 24,55

M	:	3	=
C			

Anzeige 16,366666

M	:	4	=
C			

Anzeige 12,275

.
.
.

Analog bei den Parteien B und C; man bricht ab, wenn die Zahlen von A unterschritten sind (Nummern oben in Kringeln).

Ergebnis:

Partei	A	B	C
Sitze	10	8	2

5. Folgende Tabelle ist auszufüllen ($\pi = 3{,}1415927$); runde die Ergebnisse auf 3 Dezimalen.

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{\pi}{x}$	$\left(\frac{\pi}{x}\right)^2$	$\left(\frac{x}{\pi}\right)^2$
0,5	2,000	6,283	39,478	0,025
1,0	.	.	.	.
1,5	.	.	.	.
2,0	.	.	.	.
2,5				
3,0				
3,5				

3	·	1	4	1	5	9	2	7	=	M

·	5	:	=
x	M	=	
x	=		
:	=		

Anzeige 2
Anzeige 6,283 185 4
Anzeige 39,478 418
Anzeige 0,025 330 2

usw.

Es ist wichtig, zeilenweise zu rechnen, um Rundungsfehler zu vermeiden.

Zum Abschluß noch je ein Beispiel aus Klasse 9 bzw. 11.

6. Wurzelberechnung nach Heron:

$x = \sqrt{17}$, Näherungswert 4

4	=	M									
1	7	:	M	+	M	:	2	=	M		

Anzeige 4
Anzeige 4,125

ebenso — Anzeige 4,123 106
ebenso — Anzeige 4,123 105 6
ebenso — Anzeige 4,123 105 6

Ergebnis:

$\sqrt{17} = 4{,}123\,105\,6$

7. Berechnung von Werten von Polynomen nach Horner:

$f(x) = 3{,}5x^4 + 2{,}7x^3 - 1{,}9x^2 - 04x + 13$ für $x = 2{,}157$

$$\begin{aligned} f(x) &= x(3{,}5x^3 + 2{,}7x^2 - 1{,}9x - 0{,}4) + 13 \\ &= x(x(3{,}5x^2 + 2{,}7x - 1{,}9) - 0{,}4) + 13 \\ &= x(x(x(3{,}5x + 2{,}7) - 1{,}9) - 0{,}4) + 13 \end{aligned}$$

2	·	1	5	7	=	M				
3	·	5	x	M	+	2	·	7	=	1. Klammer von innen
			x	M	—	1	·	9	=	2. Klammer von innen
			x	M	—		·	4	=	3. Klammer von innen
			x	M	+	1	3		=	Anzeige 106,158 72

(Das Programm läßt sich noch geringfügig vereinfachen.)

E r g e b n i s : f(2,157) = 106,158 72

Anhang 2:

Lösung einiger typischer Aufgaben mit dem Taschenrechner Faber-Castell **TR 2:**

1. Lineares Gleichungssystem

$$a_1u + b_1v = c_1$$
$$a_2u + b_2v = c_2$$

Für $b_1 \neq 0$ ist dieses Gleichungssystem äquivalent zu

$$a_1u + b_1v = c_1$$
$$a'_2u + 0v = c'_2 \quad \text{mit } a'_2 = a_1b_2 - a_2b_1 \quad \text{und } c'_2 = c_1b_2 - c_2b_1$$

a_1	×	b_2	—	(	a_2	×	b_1	)	=	MS

c_1	×	b_2	÷	c_2	—	b_1	×	c_2	÷	MR	=	Anzeige u

×	a_1	F	+/-	+	c_1	÷	b_1	=	Anzeige v

2. Wurzelberechnungen (Satz des Pythagoras, Kosinussatz)

$$w = \sqrt{a^2 + b^2 - a \cdot b \cdot \sqrt{3}}$$

a	F	x^2	+	(	b	F	x^2	)	—	(	3	F	$\sqrt{}$	×	a	×	b	)	=	F	$\sqrt{}$

3. Näherung von π durch eine Folge von regelmäßigen 4-, 8-, 16-, ... Ecken, die dem Einheitskreis einbeschrieben sind.

Wenn s_n die Seite eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist, dann gilt $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$.

$\frac{1}{2} n \cdot s_n = \frac{1}{2} u_n$ ist eine Näherung für π. Die Folge u_n wächst monoton. Geht man vom Quadrat aus mit $s_4 = \sqrt{2}$, so erhält man mit der Tastenfolge

2	F	$\sqrt{}$	MS	×	2	=	Anzeige $\frac{1}{2} u_4$

MR	F	x^2	—	4	=	F	+/-	F	$\sqrt{}$	—	2	=	F	+/	F	$\sqrt{}$	MS	×	4	=	Anzeige $\frac{1}{2} u_8$

ebenso [8] [=] Anzeige $\frac{1}{2} u_{16}$

ebenso [1] [6] = Anzeige $\frac{1}{2} u_{32}$

.
.
.

Die Ergebnisse sind

n	$\frac{1}{2} u_n$
4	2,828 427
8	3,061 467
16	3,124 446
32	3,136 550
64	3,140 339 usw.

4. Berechnung von dreireihigen Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

a_{22}	×	a_{33}	—	(	a_{32}	×	a_{23}	)	×	a_{11}	=	MS	
a_{21}	×	a_{33}	÷	a_{31}	—	a_{23}	×	a_{31}	×	a_{12}	=	M-	
a_{21}	×	a_{32}	÷	a_{31}	—	a_{22}	×	a_{31}	×	a_{13}	=	M+	MR	Anzeige D

Prof. Dr. Fritz Heywang

Wärmeschutzrechnungen mit dem Rechenstab

In einer Zeit, in der es deutlich wird, daß die Energiequellen unserer Erde nicht unerschöpflich sind, gilt es mit den zur Verfügung stehenden Energiearten sparsam umzugehen und vor allem unnötige Verluste zu vermeiden. Insbesondere muß diese Forderung bei allen Anwendungen der Wärme, sei es zur Raumbeheizung oder zu anderen technischen Zwecken, erhoben werden. Es ist daher zu erwarten, daß Berechnungen des Wärmeübergangs an Oberflächen, des Wärmedurchgangs durch Wände und der Wärmestrahlung in kommenden Jahren an Bedeutung gewinnen und nicht mehr nur von Fachleuten ausgeführt werden.

Wenn ein Raum höherer Temperatur, z. B. ein Wohnraum oder ein Behälter mit heißem Inhalt, durch eine Wand von einer kälteren Umgebung getrennt ist, findet man den Wärmedurchgang durch die Wand nach der Formel:

$$Q = k\,A\,t\,(\vartheta_i - \vartheta_a)$$

Hierbei bedeuten Q die durch die Wand abgegebene Wärmemenge
k den Wärmedurchgangskoeffizienten
A den Flächeninhalt der Wand
t die Zeit
ϑ_i die Innentemperatur
ϑ_a die Außentemperatur der Umgebung

Der Wärmedurchgangskoeffizient hängt von der Dicke, dem Aufbau und dem Material der Wand ab und muß in jedem Sonderfall speziell berechnet werden. Die dazu benötigten Materialkonstanten findet man in Tabellen; sie können aber nur in seltenen Fällen mit einer höheren Genauigkeit als etwa ± 5% angegeben werden. **Daher ist es auch nicht sinnvoll, die auftretenden Rechnungen, z. B. mit einem Taschenrechner, auf viele Dezimalstellen genau durchzuführen.** Hinsichtlich der erreichbaren und erforderlichen Genauigkeit sind gerade diese Rechnungen ein Anwendungsgebiet des **Rechenstabs**[1]), der auch bei einer Skalenlänge von 12,5 cm noch ausreichende Genauigkeit liefert. Bei drei zählenden Stellen rundet der Rechenstab automatisch sinnvoll auf oder ab, ohne daß die Ungenauigkeiten zu groß werden.

Der Wärmedurchgangskoeffizient einer Wand, die aus mehreren Schichten mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten besteht und die innen und außen an eine Flüssigkeit oder ein Gas grenzt, berechnet man nach folgender Gleichung:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a}$$

Dabei wurde angenommen, daß die Wand aus drei Schichten mit den Dicken d_1, d_2, d_3 und den Wärmeleitfähigkeiten λ_1, λ_2, λ_3 besteht und daß die Wärmeübergangskoeffizienten an der Innen- und Außenseite α_i und α_a sind.

Hat man aus dieser Gleichung k berechnet, so findet man Q aus der ersten angegebenen Gleichung.

Wie schon diese Formeln zeigen, erfordern die zur Berechnung des Wärmedurchgangs nötigen Gleichungen nur einfache Divisionen und Multiplikationen, die ohne besondere Anleitung auf dem Rechenschieber erledigt werden können. Deshalb wird im folgenden

1) Besonders geeignet hierfür sind die Rechenstab-Modelle Castell-Duplex 2/82 N und Castell-Novo-Duplex 2/83 N, sowie die entsprechenden Taschen-Rechenstäbe Castell 62/82 N, Castell 62/83 N.

nur dort der Berechnungsweg angegeben, wo mehrere Rechnungen zusammenkommen und bei der Durchrechnung mit dem Rechenstab kleine Rechenvorteile angewandt werden können.

Da die zur Verfügung stehenden Tabellen noch fast durchwegs bei ihren Angaben kalorische Einheiten verwenden, werden auch die folgenden Beispiele mit diesen Einheiten gerechnet und über die Umrechnung auf das internationale Einheitensystem zum Schluß noch eine Bemerkung angefügt.

Beispiel 1: Wie vermindert sich die Wärmemenge, die durch eine Wand mit den Abmessungen l_1 = 3,7 m, h_1 = 2,5 m, d_1 = 25 cm aus Ziegelmauerwerk mit λ_1 = 0,72 kcal/m h grd bei einer Innentemperatur von 22 °C und einer Außentemperatur von —7 °C hindurchgeht, wenn sie durch Auflage einer d_2 = 3 cm dicken Styroporschicht mit der Wärmeleitfähigkeit λ_2 = 0,042 kcal/m h grd isoliert wird, im Verlauf eines Tages, wenn der Wärmeübergangskoeffizient innen α_i = 7 kcal/m² h grd und außen α_a = 20 kcal/m² h grd beträgt?

Wärmeabgabe ohne Isolierung:

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1}{7} + \frac{0,25}{0,72} + \frac{1}{20}\right) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= (0,143 + 0,347 + 0,050)\,\frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= 0,540\,\frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$k_1 = 1,85\,\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

$$Q_1 = 1,85\,\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}} \cdot 2,5\text{ m} \cdot 3,7\text{ m} \cdot 24\text{ h} \cdot 29\text{ grd}$$

$$= 11\,900\text{ kcal}$$

Rechenweg für dieses Produkt aus 5 Faktoren:

Läufer auf D 1,85
CI 2,5 unter den Läufer
Läufer auf C 3,7
CI 2,4 unter den Läufer
Läufer auf C 2,9
Ablesen unter dem Läufer D 1,19

Nach Überschlagsschätzung ergibt sich der Stellenwert 11 900

Wärmeabgabe nach dem Anbringen der Isolierung:

$$\frac{1}{k_2} = \left(\frac{1}{7} + \frac{0,25}{0,72} + \frac{0,03}{0,042} + \frac{1}{20}\right) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

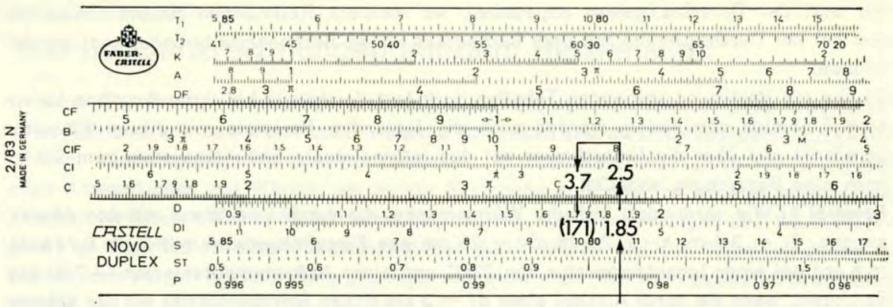
$$= (0,143 + 0,347 + 0,714 + 0,050)\,\frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

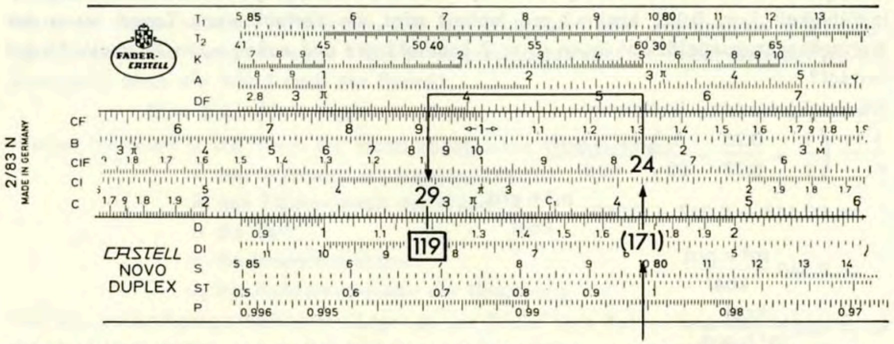
$$= 1,254\,\frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$k_2 = 0,797\,\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

$$Q_2 = 0,797 \cdot 2,5 \cdot 3,7 \cdot 24 \cdot 29\text{ kcal} = 5130\text{ kcal}$$

Q_2 beträgt nur $\frac{5130}{119}$ % = 43 % von Q_1. Die abgegebene Wärmemenge vermindert sich also durch die Auflage der Styroporschicht um 57 %.





Beispiel 2: Vergleiche den Wärmedurchgangskoeffizienten eines Einfach- und eines Doppelfensters mit dem der Wand in Beispiel 1. Dicke der Glasscheiben $d_1 = 2$ mm, Wärmeleitfähigkeit von Glas $\lambda_1 = 0{,}72$ kcal/m h grd, Dicke der Luftschicht zwischen den Glasscheiben des Doppelfensters $d_2 = 6$ cm, Leitfähigkeit dieser Luftschicht $\lambda_2 = 0{,}29$ kcal/m h grd, Wärmeübergangskoeffizient außen $\alpha_a = 20$ kcal/m² h grd, innen $\alpha_i = 7$ kcal/m² h grd.

Wärmedurchgangskoeffizient des Einfachfensters:

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1}{7} + \frac{0{,}002}{0{,}72} + \frac{1}{20}\right) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= (0{,}143 + 0{,}003 + 0{,}050) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= 0{,}196 \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$k_1 = 5{,}10 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

Wärmedurchgangskoeffizient des Doppelfensters:

$$\frac{1}{k_2} = \left(\frac{1}{7} + \frac{0{,}002}{0{,}72} + \frac{0{,}06}{0{,}29} + \frac{0{,}002}{0{,}72} + \frac{1}{20}\right) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= (0{,}143 + 0{,}003 + 0{,}207 + 0{,}003 + 0{,}050) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= 0{,}406 \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}}$$

$$k_2 = 2{,}46 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

Das Einfachfenster besitzt einen Wärmedurchgangskoeffizienten, der fast dreimal so groß ist wie der einer nicht isolierten Ziegelsteinwand. Auch beim Doppelfenster ist der Wärmedurchgangskoeffizient trotz der wesentlichen Verminderung noch größer als der einer Ziegelwand. Daher schützt eine Wand, insbesondere wenn sie eine zusätzliche Isolierschicht trägt, besser vor Wärmeverlusten als selbst ein Doppelfenster. Zu große Fenster stellen eine Minderung des Wärmeschutzes eines Hauses dar.

Beispiel 3: Welche Dicke muß eine Wärmeschutzschicht aus Glaswolle ($\lambda = 0{,}25$ kcal/m h grd) haben, damit sie die dünne Metallwand eines Behälters mit der Oberfläche $A = 2{,}15$ m² so gut isoliert, daß sein Inhalt mit einer Heizleistung von $P = 300$ W bei einer Außentemperatur von 18 °C auf einer konstanten Innentemperatur von 70 °C gehalten werden kann. Wärmeübergangskoeffizienten: $\alpha_i = 320$ kcal/m² h grd, $\alpha_a = 5{,}5$ kcal/m² h grd.
Die zugeführte Heizenergie wird nach der Beziehung 1 kW = 860 kcal/h ins kalorische Maß umgerechnet und dann der abgegebenen Wärme gleichgesetzt:

$$P\,t = k\,A\,t\,(\vartheta_i - \vartheta_a) \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{A\,(\vartheta_i - \vartheta_a)}{P}$$

$$P = 0{,}3 \cdot 860 \text{ kcal/h} = 258 \text{ kcal/h}$$

Bei der Berechnung des Wärmedurchgangskoeffizienten kann die dünne Metallwand vernachlässigt werden.

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{320} + \frac{1}{5{,}5}\right) \frac{\text{m}^2\,\text{h grd}}{\text{kcal}} + \frac{d}{0{,}25}\,\frac{\text{m h grd}}{\text{kcal}}$$

$$= (0{,}185 \text{ m} + 4\,d) \frac{\text{m h grd}}{\text{kcal}}$$

Durch Einsetzen in die oben aufgestellte Gleichung folgt nun:

$$(0{,}185 \text{ m} + 4\,d) \frac{\text{m h grd}}{\text{kcal}} = \frac{2{,}15 \text{ m}^2 \cdot 52 \text{ grd}}{258 \text{ kcal/h}}$$

$$d = \left(\frac{2{,}15 \cdot 52}{4 \cdot 258} - \frac{0{,}185}{4}\right) \text{m} = 0{,}062 \text{ m} = 6{,}2 \text{ cm}$$

Rechenweg:

Läufer auf D 2,15
C 4 unter den Läufer
Läufer auf C 5,2
C 2,58 unter den Läufer
unter C 1 ablesen: D 1,08

Nach Abschätzung des Stellenwerts ergibt sich:
$d = (0{,}108 - 0{,}046)$ m $= 0{,}062$ m

Bei einer Oberflächentemperatur von mehr als etwa 100° C wird der Anteil der Wärme, der durch Wärmestrahlung abgegeben wird, größer. Während er unterhalb dieser Temperatur durch einen Zuschlag zum Wärmeübergangskoeffizienten berücksichtigt wird, geht das über 100° C nicht mehr. Dann berechnet man den gesamten Wärmeübergangskoeffizienten α als Summe des Wärmeübergangskoeffizienten α_k durch Konvektion und Wärmeleitung und des Wärmeübergangskoeffizienten α_s durch Wärmestrahlung. Den letzteren erhält man aus der Formel: $\alpha_s = \sigma\,\varepsilon\,a$

Hierbei ist σ die Strahlungskonstante mit dem Wert $\sigma = 4{,}89 \cdot 10^{-8}$ kcal/m² h K⁴, ε der Emissionsgrad der Oberfläche, den man einer Tabelle entnimmt und a der Temperaturbeiwert, der sich aus der Oberflächentemperatur T_A und der Umgebungstemperatur T_u nach folgender Gleichung berechnet:

$$a = T_A^3 + T_A^2\,T_u + T_A\,T_u^2 + T_u^3 = (T_A + T_u)\,(T_A^2 + T_u^2)$$

Beispiel 4: Berechne den Gesamtwärmeübergangskoeffizienten für eine Oberfläche mit $\alpha_k = 5$ kcal/m² h grd, $\varepsilon = 0{,}85$ bei einer Temperatur $T_A = 160^0$ C ≙ 433 K und der Umgebungstemperatur $T_u = 15^0$ C ≙ 288 K.

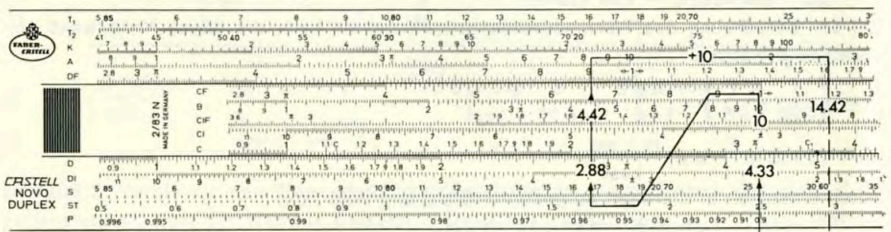
$T_A = 433$ K $T_u = 288$ K $T_A + T_u = 721$ K

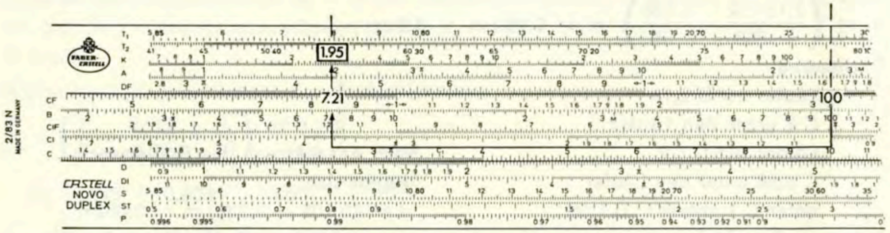
$a = 721 \cdot (433^2 + 288^2)\,K^3 = 1{,}95 \cdot 10^8\,K^3$

Rechenweg:[2])

Läufer auf D 4,33
B 10 unter den Läufer
Läufer auf D 2,88
Ablesen unter dem Läufer: B 4,42
10 + 4,42 = 14,42
Läufer auf B 14,42
B 100 unter den Läufer
Läufer auf B 7,21
Ablesen unter dem Läufer: A 1,95

Nach Abschätzen des Stellenwerts ergibt sich $a = 1{,}95 \cdot 10^8\,K^3$





$$\alpha_s = 4{,}89 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}95 \cdot 10^8 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}} = 8{,}11 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_s = (5 + 8{,}11) \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}} = 13{,}11 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\,\text{h grd}}$$

Aus der Tatsache, daß sich für α_s ein größerer Wert ergibt als für α_k geht hervor, daß hier mehr Wärme durch Strahlung als durch Wärmeleitung oder -konvektion abgegeben wird. Bei hohen Temperaturen erfordert daher ein guter Wärmeschutz auch Maßnahmen zur Verminderung der Wärmestrahlung, z. B. durch Senken der Oberflächentemperatur oder durch Verwendung von Oberflächenmaterial mit möglichst kleinem Emissionsgrad.

2) Vergleiche den Beitrag von STR Fuchs „Addition auf dem logarithmischen Rechenstab" im Faber-Castell-Rechenstab-Brief Nr. 14/1971, Seite 16.

Beispiel 5: Ein Stahlkessel besitzt eine Oberflächentemperatur $T_A = 450^0$ C ≙ 723 K; der Emissionsgrad der rauhen Oberfläche ist $\varepsilon_1 = 0{,}7$. Wegen der durch die hohe Temperatur verstärkten Konvektion ist $\alpha_k = 6{,}5$ kcal/m² h grd zu setzen. Die Umgebungstemperatur beträgt $T_u = 25^0$ C ≙ 298 K.

a) Wie groß ist der gesamte Wärmeübergangskoeffizient ohne zusätzliche Wärmeisolierung? Welche Wärmeabgabe ergibt sich in 1 h für 1 m²?

b) Auf welchen Wert vermindert sich der Wärmeübergangskoeffizient und die Wärmeabgabe durch eine Verkleidung mit blankem Aluminium, das den Emissionsgrad 0,05 besitzt, wobei T_A und α_k unverändert bleiben?

c) Wie groß wird der Wärmeübergangskoeffizient, wenn der Kessel mit einer 2 cm dicken Glaswolleschicht (Emissionsgrad $\varepsilon_2 = 0{,}85$) umgeben wird, wodurch sich die Oberflächentemperatur auf 125^0 C ≙ 398 K und α_k auf 4,8 kcal/m² h grd vermindert?

d) Welcher Wärmeübergangskoeffizient und welche Wärmeabgabe ergibt sich, wenn beide Maßnahmen gleichzeitig verwendet werden ($T_A = 125^0$ C ≙ 398 K, $\varepsilon = 0{,}05$, $\alpha_k = 4{,}8$ kcal/m² h grd)?

(Da die Rechenwege genau denen in Beispiel 4 entsprechen, sind sie nicht mehr im Detail angeführt.)

a) $T_A + T_u = 1021$ K $T_A - T_u = \vartheta_A - \vartheta_u = 425$ grd
$\alpha_s = 4{,}89 \cdot 0{,}7 \cdot 1021\ (723^2 + 298^2) \cdot 10^{-8}$ kcal/m² h grd $= 21{,}4$ kcal/m² h grd
$\alpha = (6{,}5 + 21{,}4)$ kcal/m² h grd $= 27{,}9$ kcal/m² h grd
$Q = 27{,}9 \cdot 425$ kcal $= 11\,860$ kcal

b) $T_A + T_u = 1021$ K $T_A - T_u = \vartheta_A - \vartheta_u = 425$ grd
$\alpha_s = 4{,}89 \cdot 0{,}05 \cdot 1021\ (723^2 + 298^2) \cdot 10^{-8}$ kcal/m² h grd $= 1{,}5$ kcal/m² h grd
$\alpha = (6{,}5 + 1{,}5)$ kcal/m² h grd $= 8$ kcal/m² h grd
$Q = 8 \cdot 425$ kcal $= 3400$ kcal

c) $T_A + T_u = 696$ K $T_A - T_u = \vartheta_A - \vartheta_u = 100$ grd
$\alpha_s = 4{,}89 \cdot 0{,}85 \cdot 696\ (398^2 + 298^2) \cdot 10^{-8}$ kcal/m² h grd $= 7{,}2$ kcal/m² h grd
$\alpha = (4{,}8 + 7{,}2)$ kcal/m² h grd $= 12$ kcal/m² h grd
$Q = 12 \cdot 100$ kcal $= 1200$ kcal

d) $T_A + T_u = 696$ K $T_A - T_u = \vartheta_A - \vartheta_u = 100$ grd
$\alpha_s = 4{,}89 \cdot 0{,}05 \cdot 696\ (398^2 + 298^2) \cdot 10^{-8}$ kcal/m² h grd $= 0{,}4$ kcal/m² h grd
$\alpha = (4{,}8 + 0{,}4)$ kcal/m² h grd $= 5{,}2$ kcal/m² h grd

Das Ergebnis dieser Rechnungen zeigt, daß sowohl die Herabsetzung der Oberflächentemperatur durch eine Wärmeschutzschicht wie auch die Verminderung des Emissionsgrades die Wärmeabgabe wesentlich verkleinern, daß aber für eine möglichst gute Wärmeisolierung beide Maßnahmen erforderlich sind. Bei dem behandelten Beispiel konnte die Wärmemenge auf weniger als 5% vermindert werden.

Bei einem glühenden Körper hat die Umgebungstemperatur praktisch keinen Einfluß mehr. Die Wärme wird fast vollständig durch Strahlung abgegeben und läßt sich unmittelbar nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz berechnen:

$$Q = A\,t\,\sigma\,\varepsilon\,T^4$$

Beispiel 6: Welche Wärmeleistung wird von einer glühenden Metallplatte mit der Fläche 6 cm² bei einem Emissionsgrad $\varepsilon = 0{,}35$ abgestrahlt, wenn sie auf eine Temperatur von 1550^0 C gebracht wird?

$A = 0{,}000\,6\ \mathrm{m^2} \quad \sigma = 4{,}89 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2\,h\,K^4}} \quad \varepsilon = 0{,}35 \quad T = (1550 + 273)\ \mathrm{K} = 1823\ \mathrm{K}$

$$P = \frac{Q}{t} = 0{,}000\,6\ \mathrm{m^2} \cdot 4{,}89 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2\,h\,K^4}} \cdot 0{,}35 \cdot 1823^4\ \mathrm{K^4} = 113{,}5\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}}$$

Wenn dieses Resultat nicht in kalorischen Einheiten, sondern in den Einheiten des internationalen Einheitensystem gewünscht wird, benötigt man zur Umrechnung die Beziehung:

$$1\ \frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\ \mathrm{cal}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{4186\ \mathrm{Ws}}{3600\ \mathrm{s}} = 1{,}163\ \mathrm{W_s}$$

Dann erhält man $P = 113{,}5 \cdot 1{,}163\ \mathrm{W_s} = 132\ \mathrm{W_s}$

Die letzte Umrechnung wird in Zukunft überflüssig, wenn alle Angaben im internationalen Einheitensystem gegeben werden und alle Tabellen auf neue Einheiten umgestellt sind, so daß man das Ergebnis sofort in W erhält. Solange aber noch Tabellen aus früheren Büchern verwendet werden, werden Umrechnungen vom technischen auf das internationale Einheitensystem notwendig sein. Man kann sich die Tabellen selbst umstellen, wenn man alle Angaben, die cal oder kcal enthalten, mit dem Faktor 4,19 J/cal bzw. 4,19 kJ/kcal multipliziert. Wenn außer der Einheit cal noch im Nenner die Einheit h vorkommt, benötigt man den oben berechneten Faktor 1,163 Wh/kcal. Für solche Umrechnungen ist wieder der Rechenstab ganz besonders geeignet, weil dazu nur **eine** Zungeneinstellung erforderlich ist, besonders wenn der benützte Rechenstab die um π versetzten Skalen besitzt.

Ing. (grad.) Hartmut Westphal

Der Rechenstab Castell-Novo-Duplex 2/83 N in der Elektrotechnik

Eine Formelsammlung mit Übungsbeispielen

1. Einheiten in der Elektrotechnik

Einheiten im SI-System (mksA-System)

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenkurzzeichen	Umrechnungen
Länge	l	Meter	m	
Masse	m	Kilogramm	kg	
Zeit	t	Sekunde	s	
Strom	I	Ampere	A	
Kraft	F	Newton	N	$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{mkg/s^2}$
Energie, Arbeit	W	Joule	J	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Nm} = 1\ \mathrm{Ws} = 1\ \mathrm{m^2kg/s^2}$
Leistung				
(Wirkleistung)	P (Pw)	Watt	W	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{Nm/s} = 1\ \mathrm{mkg/s^3}$
(Scheinleistung)	(Ps)	Voltampere	VA	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{VA}$
(Blindleistung)	(PB)	Var	var	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{var}$
Spannung	U	Volt	V	$1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/As} = 1\ \mathrm{J/c} = 1\ \mathrm{Nm/As} = 1\ \mathrm{W/A}$
Widerstand	R	Ohm	Ω	$1\ \Omega = 1\ \mathrm{V/A} = 1\ \mathrm{m^2kg/A^2s^2}$
Leitwert	G	Siemens	S	$1\ \mathrm{S} = 1/\Omega = 1\ \mathrm{A/V}$
Ladung	Q	Coulomb	C	$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{As}$
Kapazität	C	Farad	F	$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{s}/\Omega = 1\ \mathrm{As/V} = 1\ \mathrm{C/V}$
elektr. Flußdichte	D	—	C/m²	$1\ \mathrm{C/m^2} = 1\ \mathrm{As/m^2}$
elektr. Feldstärke	E	—	V/m	$1\ \mathrm{V/m} = 1\ \mathrm{N/As}$
magn. Fluß	Φ	Weber	Wb	$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{Vs}$
magn. Induktion	B	Tesla	T	$1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{Vs/m^2}$
magn. Feldstärke	H	—	A/m	
Induktivität	L	Henry	H	$1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{Vs/A}$

2. Das elektrostatische Feld

2.1. Ladung, Feldstärke

Q = elektrische Ladung oder Elektrizitätsmenge

Die elektrische Ladung ist eine Grundeigenschaft der Materie. Sie verursacht eine Kraftwirkung auf eine andere Ladung.
Die kleinste in der Natur vorkommende Elektrizitätsmenge, die Elementarladung, trägt das Elektron und das Proton.
Elektrische Elementarladung:

$$\boxed{e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As}}$$

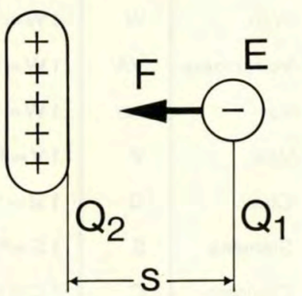
Einheit der elektrischen Ladung:

$$\boxed{1\ \text{C} = 1\ \text{As} = 6{,}2 \cdot 10^{18} \cdot e}$$

In der Praxis dient der Strom I als Basisgröße und nicht die von der Natur vorgegebene Grundgröße Ladung. Die Wirkungen des elektrischen Stromes lassen eine einfache Erfassung seines Wertes zu.

E = elektrische Feldstärke

Ein Maß für die elektrische Feldstärke ist die auf eine Ladung Q_1 wirkende Kraft F einer zweiten Ladung Q_2 in einem elektrischen Feld.



Die Feldstärke E ist abhängig vom Abstand s der beiden Ladungen Q_1 und Q_2. E wächst mit kleiner werdendem Abstand.

Es gilt:

$$\boxed{E = \frac{F}{Q}}$$ **elektrische Feldstärke**

$$\boxed{F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}}$$

Coulombsche Gesetz
(Kraft zwischen 2 Punktladungen)

ε_0 = elektrische Feldkonstante
$\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12}$ [As/Vm]

Rechenbeispiel

Zwischen den beiden Ladungen $Q_1 = 7 \cdot 10^{-7}$ As und $Q_2 = 3 \cdot 10^{-8}$ As wirkt eine Kraft $F = 1{,}31$ N.
Wie groß ist der Abstand zwischen den Punktladungen?

Gegeben: $Q_1 = 7 \cdot 10^{-7}$
$Q_2 = 3 \cdot 10^{-8}$
$F = 1{,}31\ \text{N} = 1{,}31\ \frac{\text{VAs}}{\text{m}}$
Gesucht: $r = ?$

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\, r^2}$$

$$r^2 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0 \cdot F}$$

$$r = \sqrt{\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\,\varepsilon_0 \cdot F}}$$

$$r = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-7}\ \text{As} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\ \text{As}}{4\pi \cdot \varepsilon_0\ \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 1{,}31\ \frac{\text{VAs}}{\text{m}}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{7 \cdot 3 \cdot 10^{-15}}{4\pi \cdot 8{,}859 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}31} \cdot \frac{\cancel{\text{As}} \cdot \cancel{\text{As}} \cdot \cancel{\text{V}}\text{m} \cdot \text{m}}{\cancel{\text{As}} \cdot \cancel{\text{VAs}}}}$$

$$r = \sqrt{0{,}144 \cdot 10^{-3} \cdot \text{m}^2} = \sqrt{144 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2}$$

$$r = 12 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\underline{\underline{r = 12\ \text{mm}}}$$

2.2. Spannung, Energie, Leistung

U = elektrische Spannung

Die elektrische Spannung U ist das spezifische Arbeitsvermögen einer Ladung Q.

$$\boxed{U = \frac{W}{Q} = \frac{F \cdot S}{Q}}$$ Spannung

W = elektrische Energie

$$\boxed{W = Q \cdot U}$$ elektrische Energie

P = elektrische Leistung

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{Q \cdot U}{t}}$$ elektrische Leistung

Es bedeutet:

E	= elektrische Feldstärke	in V/m, N/As
F	= Kraft	in N
P	= Leistung	in W, VA
Q	= Ladung, Elektrizitätsmenge	in As, C
U	= Spannung	in V
W	= elektrische Energie	in VAs, Ws, Nm
s	= Weglänge	in m
t	= Zeit	in s

Rechenbeispiel:

Wie groß ist die elektrische Leistung P, die entsteht, wenn die Kraft F = 1,31 N, die zwischen den beiden Punktladungen Q_1 und Q_2 besteht, in t = 3 sec abgebaut wird.
s = 12 mm.

Gegeben: F = 1,31 N; t = 3 sec; s = 12 mm.
Gesucht: P = ?

$$P = \frac{Q \cdot U}{t}$$ U ist nicht gegeben

$$U = \frac{F \cdot s}{Q}$$ U einsetzen

$$P = \frac{Q \cdot F \cdot s}{t \cdot Q}$$

$$P = \frac{F \cdot s}{t}$$

$$= \frac{1{,}31 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{3} \cdot \frac{N \cdot m}{s} = W$$

$$P = 5{,}24 \cdot 10^{-3}\ W$$

P = 5,24 mW

G. Sellge, Abo/Finnland

Auflösung quadratischer Gleichungen mit dem Rechenstab

Die folgenden Ausführungen sollen darlegen, wie der Lösungsausdruck quadratischer Gleichungen durch zweckmäßiges Umformen zum praktischen Einsatz des Rechenstabes aufbereitet werden kann.

Die vollständige quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat als Lösung den Ausdruck

$$x_{1\,u.\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

den man zu

$$x_{1\,u.\,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{b}{2a}\sqrt{1 - \frac{4ac}{bb}}$$

umformt.

Beispiel 1

Für die Gleichung $3{,}82\,x^2 - 4{,}36\,x - 7{,}55 = 0$ gilt:

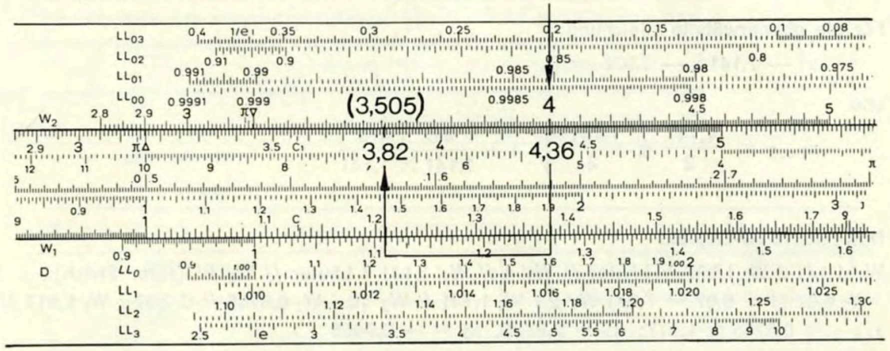
$$x_{1\,u.\,2} = \frac{4{,}36}{7{,}64} \pm \frac{4{,}36}{7{,}64}\sqrt{1 + \frac{4 \times 3{,}82 \times 7{,}55}{4{,}36 \times 4{,}36}}$$

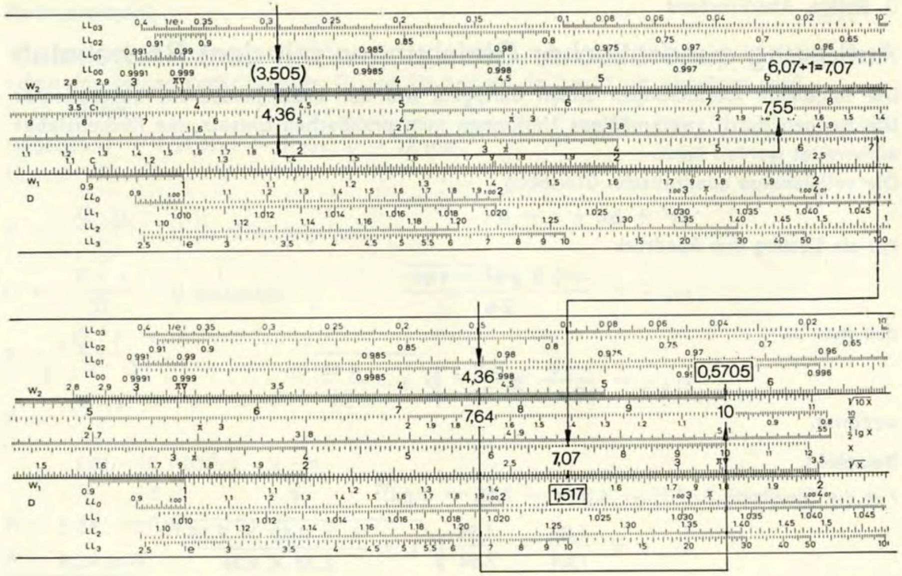
Auf dem Rechenstab CASTELL-NOVO-DUPLEX Nr. 2/83 N mit der erhöhten Präzision der sogenannten „Wurzelskalen" (W_1, W_2) errechnet man:

W_2' 4,36 unter W_2 4	W_2' 4,36 / W_2 4
Läufer auf W_2' 3,82	Läufer / W_2' 3,82
W_2' 4,36 unter den Läufer	W_2' 4,36 / Läufer
W_2' 7,55 gibt W_2 6,07	W_2' 7,55 / W_2 **6,07**
Nun ohne den Stab 1 + 6,07 = 7,07	
W_2' 7,64 unter W_2 4,36	W_2' 7,64 / W_2 4,36
W_2 10 gibt W_2 0,5705	W_2' 10 / W_2 **0,5705**
und	
C 7,07 gibt W_1 1,517	C 7,07 / W_1 **1,517**

Man erhält demnach:

$$x_{1\,u.\,2} = 0{,}5705 \pm 1{,}517; \quad x_1 = \mathbf{2{,}0875}, \quad x_2 = \mathbf{-0{,}9465}$$





Mit CASTELL-Schul-D-Stab 52/82:

C 4,36 / D 4 // Läufer / C 3,82 // C 4,36 / Läufer // C 7,55 / D **6,07** (1 + 6,07 = 7,07)
C 7,64 / D 4,36 // C 10 / D **0,571** // B 7,07 / D **1,517**

$x_{1\,u\,2} = 0{,}571 \pm 1{,}517;\; x_1 = \mathbf{2{,}088},\; x_2 = \mathbf{-0{,}946}$

Geht man zu der Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

der Gleichung über, so ergibt sich

$$x_{1\,u.\,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4\,q}{p\,p}}$$

Für die obenerwähnte Gleichung:

$$x^2 - 1{,}141\,x - 1{,}976 = 0$$

und

$$x_{1\,u.\,2} = \frac{1{,}141}{2} \pm \frac{1{,}141}{2}\sqrt{1 + \frac{4 \times 1{,}976}{1{,}141 \times 1{,}141}}$$

Nun mit NOVO-Duplex:

W_1' 1,141 / W_1 1,976 // Läufer // W_2' 4 // W_1' 1,141 / Läufer // W_2' RI (roter Strich) / W_2 **6,07** (1 + 6,07 = 7,07) W_1' 2 / W_1 1,141 // W_2' 10 / W_2 **0,5705** // C 7,07 / W_1 **1,517** //
$x_{1\,u.\,2} = 0{,}5705 \pm 1{,}517;\; x_1 = \mathbf{2{,}0875},\; x_2 = \mathbf{-0{,}9465}$

Mit Schul-D-Stab:

C 1,141 / D 1,976 // Läufer / C 4 // C 1,141 / Läufer // C 1 / D **6,07** (1 + 6,07 = 7,07)
C 2 / D 1,141 // C 10 / D **0,571** // B 7,07 / D **1,517** // $x_1 = \mathbf{2{,}088},\; x_2 = \mathbf{-0{,}946}$

Beispiel 2

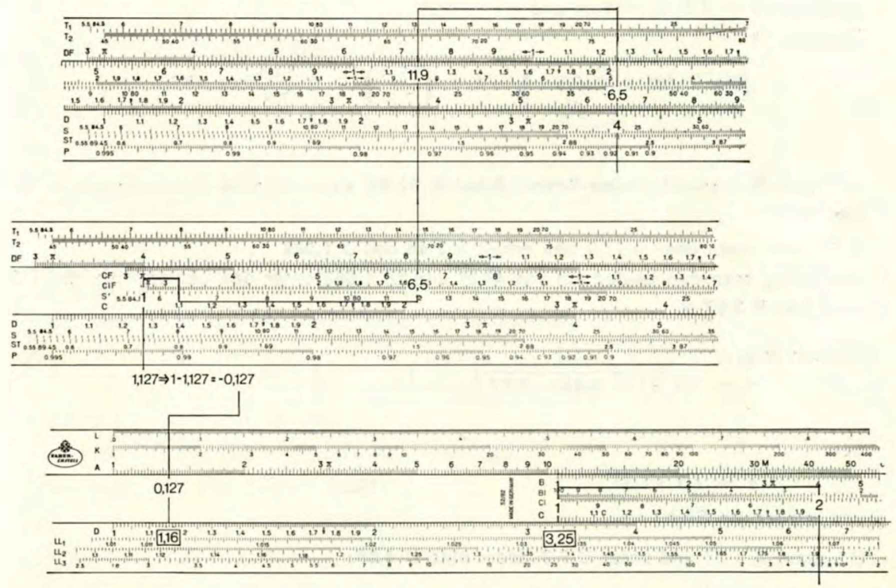
$$x^2 + 6{,}5\,x + 11{,}9 = 0$$

$$x_{1\,u.\,2} = -\frac{6{,}5}{2} \pm \frac{6{,}5}{2}\sqrt{1 - \frac{4 \times 11{,}9}{6{,}5 \times 6{,}5}}$$

Mit NOVO-Duplex	**Schul-D-Stab**
W_2' 6,5 / W_1 11,9	C 6,5 / D 4
Läufer / W_1' 2	Läufer / CF 11,9
W_2' 6,5 / Läufer	CF 6,5 / Läufer
W_1' 2 / W_1 **1,127**	CF 1 / DF **1,127**

$$1 - 1{,}127 = -0{,}127$$

W_1' 2 / W_2 6,5	C 2 / D 6,5
W_1' RI (roter Indexstrich) / W_1 **3,25**	C 1 / D **3,25**
C 0,127 / W_1 **1,158**	B 0,127 / D **1,16**
$x_{1\,u.\,2} = \mathbf{-3{,}25 \pm 1{,}158\,i}$	$x_{1\,u.\,2} = \mathbf{-3{,}25 \pm 1{,}16\,i}$



G. Sellge, Åbo/Finnland

Der Kosinus-Satz am Rechenstab

Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben (SWS), so ist — besonders zur Berechnung der Gegenseite — der Kosinus-Satz anzuwenden:

Gegeben: a, b und γ
Gesucht: c
Der Kosinus-Satz ergibt

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma}$$

Wenn a kleiner als b ist, wird der Ausdruck wie folgt umgewandelt:

$$c = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\,\frac{b}{a}\cos\gamma}$$

Ist der Winkel γ größer als 90⁰, verwendet man die Form

$$c = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\,\frac{b}{a}\sin(\gamma - 90^0)}$$

weil $\cos\gamma = -\sin(\gamma - 90^0)$

An zwei Beispielen soll gezeigt werden, wie dieser Rechengang mit Hilfe des Rechenstabes in überaus praktischer Weise durchgeführt werden kann.

I. Gegeben: a = 7,3; b = 11,4 und $\gamma = 48{,}6^0$
Gesucht: c

$$\text{Man findet } c = 7{,}3\sqrt{1 + \left(\frac{11{,}4}{7{,}3}\right)^2 - 2\,\frac{11{,}4}{7{,}3}\cos 48{,}6^0}$$

Auf dem Rechenstab **Faber-Castell-Schul-D 52/82** sind folgende Einstellungen erforderlich:

C 7,3 stellt man über D 11,4 und erhält A 2,44 und D **1,562**
Nun bringt man den Läufer auf cos 48,6⁰ und CI 1,562 unter den Läuferstrich. Bei C 2 liest man **D 2,07** ab.

Hieraus folgt:

$$c = 7{,}3\sqrt{1 + 2{,}44 - 2{,}07}$$

oder

$$c = 7{,}3\sqrt{1{,}37}$$

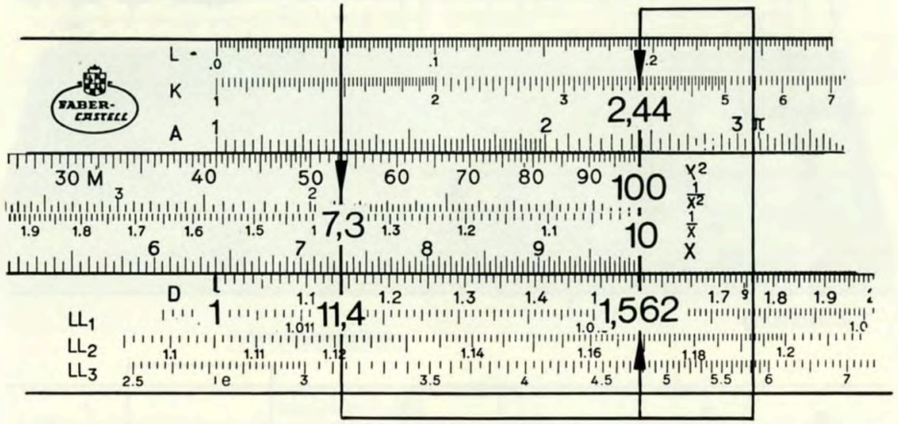
und wieder am Stab:

B 1 unter A 1,37 und unter C 7,3 findet man **D 8,55.**

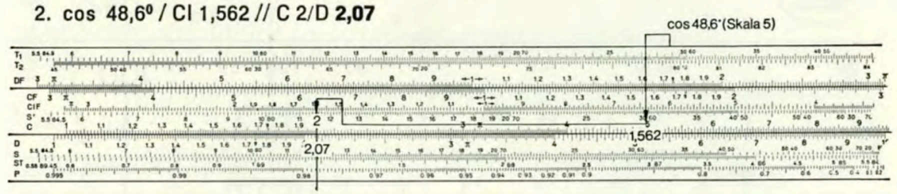
Also $\quad 1 + 2{,}44 = 3{,}44$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 1{,}37$

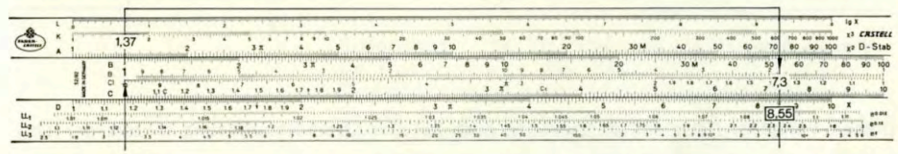
1. D 11,4 / C 7,3 // B 100 / A **2,44** und C 10/D 1,562 $\quad -2{,}07$



2. cos 48,6⁰ / CI 1,562 // C 2/D **2,07**



3. B 1 / A 1,37 // C 7,3 ⁰ D **8,55**



II. Gegeben: a = 85,3; b = 96,7 und $\gamma = 126{,}6^0$
Gesucht: c
Weil $\cos 126{,}6^0 = -\sin 36{,}6^0$, lautet die Umformung

$$c = 85{,}3\sqrt{1 + \left(\frac{96{,}7}{85{,}3}\right)^2 + 2\,\frac{96{,}7}{85{,}3}\sin 36{,}6^0}$$

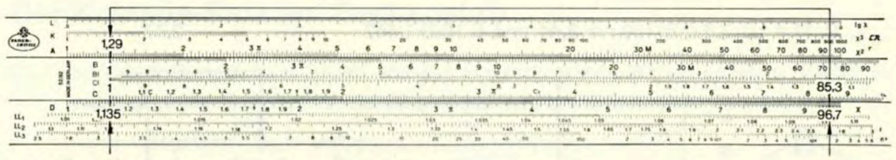
und nun mit dem Rechenstab:

1. D 96,7 / C 85,3 // B 1 / A **1,29** und C 1/D 1,133
2. S 36,6⁰ / CI 1,133 // C 2 / D **1,352**

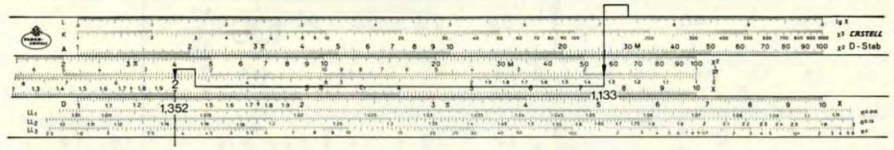
$$c = 85{,}3\sqrt{3{,}642}$$

weil $1 + 1{,}29 + 1{,}352 = 3{,}642$

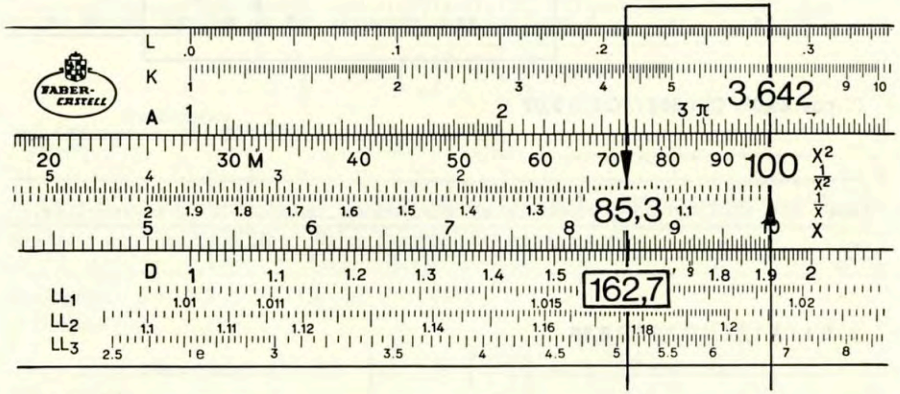
3. A 3,642 / B 1 // C 85,3 / D **162,7**



1. Einstellung



2. Einstellung



3. Einstellung

Dieses Verfahren ist ziemlich praktisch auch bei der Dreiecksauflösung mittels der Logarithmen, wie die nachstehenden Rechnungen zeigen.

	Beispiel 1.		**Beispiel 2.**	
lg b	= 1,05690		= 1,98543	
lg a	= 0,86332		= 1,93095	
lg (b:a)	= 0,19358		= 0,05448	
lg 2	= 0,30103		= 0,30103	
lg cos γ	= 0,82041-1	lg sin (γ-90°)	= 0,77541-1	
	Nlg 0,31502	= — 2,0655	Nlg 0,13092	= + 1,3518 = 2(b:a) cos γ
	Nlg 0,38716	= + 2,4387	Nlg 0,10896	= + 1,2852 = $(b:a)^2$
lg R	= 0,13773	+ 1	= 0,56074	+ 1
lg $\sqrt{R}$	= 0,06887	1,3732	= 0,28037	3,6370 = R
lg c	= 0,93219		= 2,21132	
c	= **8,5544**		= **162,67**	